3.2. Semidreapta. Semiplanul

Semidreapta

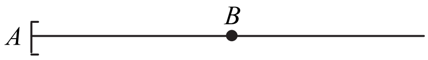
O semidreaptă se reprezintă în desen, spre exemplu ca în figura următoare:

Spre deosebire de o dreaptă, pe care o considerăm prelungită la nesfârşit în ambele părţi, semidreapta o considerăm prelungită la nesfârşit într-o singură parte şi limitată în cealaltă parte.

Definiţie: **Semidreapta** este mulţimea tuturor punctelor unei drepte situate de aceeaşi parte a unui punct al acestei drepte, punct ce se numeşte **originea semidreptei**. La fel ca şi dreapta, semidreapta se notează cu două litere mari ale alfabetului.

Primul punct din notaţia semidreptei indică **originea**, iar **al doilea punct** indică un punct oarecare de pe semidreaptă.

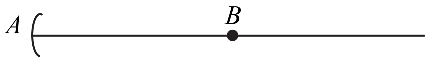
Definiţie: Semidreapta care îşi conţine originea se numeşte **semidreaptă închisă**.

Exemplu:


Notăm: $[AB$; Citim: semidreapta închisă AB.

- A indică originea semidreptei şi conform definiţiei, $A \in [AB$.
- $B \in [AB$, conform definiţiei.

Definiţie: Semidreapta care nu-şi conţine originea se numeşte **semidreaptă deschisă**.

Exemplu:


Notăm: $(AB$; Citim: semidreapta deschisă AB.

- A indică originea semidreptei şi conform definiţiei, $A \notin (AB$;
- $B \in (AB$, conform definiţiei.

Observaţii: 1) $[AB \subset AB$; $(AB \subset AB$.
2) $[AB = (AB \cup \{A\}$; $(AB = [AB - \{A\}$.

Semidrepte opuse. Semidrepte identice

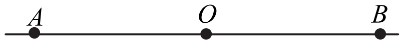
Dreapta AB este **suportul** semidreptelor. Orice punct al unei drepte determină pe dreapta respectivă două semidrepte, numite **semidrepte opuse**.

Exemplu:


Semidreptele $[OA$ şi $[OB$ sunt semidrepte închise, opuse.
Semidreptele $(OA$ şi $(OB$ sunt semidrepte deschise, opuse.

Definiție: Două semidrepte formate din aceleaşi puncte se numesc **semidrepte identice.**

Exemplu:

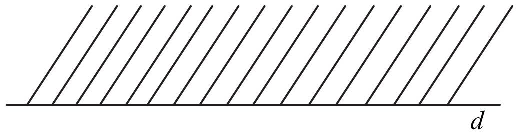


Semidreptele [*AO* şi [*AB* sunt semidrepte închise, identice.
Semidreptele (*AO* şi (*AB* sunt semidrepte deschise, identice.

Definiție: Două semidrepte care nu au aceleaşi puncte se numesc semidrepte **distincte** (**diferite**).

Semiplanul

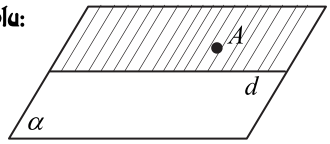
Definiție: **Semiplanul** este mulțimea tuturor punctelor unui plan situate de aceeaşi parte a unei drepte inclusă în acel plan.



Se notează cu o literă mică şi o literă mare din alfabet. Litera mică din notația semiplanului indică dreapta care separă punctele planului şi se numeşte **frontiera semiplanului**, iar litera mare indică un punct oarecare al semiplanului.

Definiție: Semiplanul care îşi conține frontiera se numeşte *semiplan închis*.

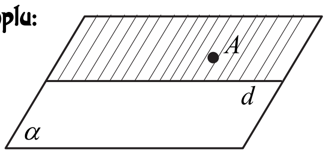
Exemplu:



Notăm: [*dA* ; Citim: semiplanul închis *dA*
• *d* indică frontiera semiplanuului şi conform definiției, $d \subset [dA$.
• $A \in [dA$, conform definiției.

Definiție: Semiplanul care nu îşi conține frontiera se numeşte **semiplan deschis**.

Exemplu:

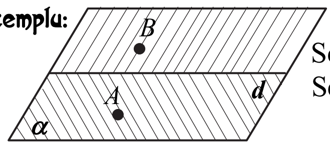


Notăm (*dA* ; Citim: semiplanul deschis *dA*
• *d* indică frontiera semiplanului şi conform definiției $d \not\subset (dA$;
• $A \in (dA$, conform definiției.

Semiplane opuse. Semiplane identice

Orice dreaptă inclusă într-un plan separă punctele din acel plan în două semiplane, numite *semiplane opuse*.

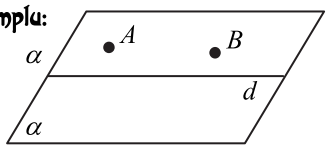
Exemplu:



Semiplanele [*dA* şi [*dB* sunt semiplane închise, opuse.
Semiplanele (*dA* şi (*dB* sunt semiplane deschise, opuse.

Definiţie: Două semiplane formate din aceleaşi puncte se numesc **semiplane identice**.

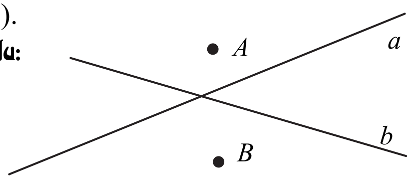
Exemplu:



Semiplanele $[dA$ şi $[dB$ sunt semiplane închise, identice şi notăm $[dA = [dB$.
Semiplanele $(dA$ şi $(dB$ sunt semiplane deschise, identice şi notăm $(dA = (dB$.

Definiţie: Două semiplane care nu au aceleaşi puncte se numesc **semiplane diferite** (**distincte**).

Exemplu:

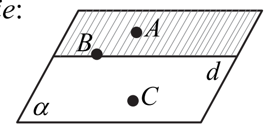


Semiplanele $[aA$ şi $[bB$ sunt semiplane închise, diferite şi notăm $[aA \neq [bB$.
Semiplanele $(aA$ şi $(bB$ sunt semiplane deschise, diferite şi notăm $(aA \neq (bB$.

Probleme rezolvate

1. Desenaţi un plan α, o dreaptă d, $d \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin d$, $B \in d$, $C \in \alpha$, $C \notin [dA$ şi haşuraţi semiplanul $[dA$.

Soluţie:

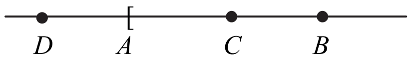


2. Fie punctele diferite A, B, C, D. Ilustraţi grafic următoarele situaţii geometrice:
a) $[AB = [AC$, $D \in AB$, $D \notin [AB$;
b) $(AD = (AC$, $B \in AC$, $B \notin (AC$.

Soluţie: a) Avem două situaţii:

1) B este situat între A şi C:

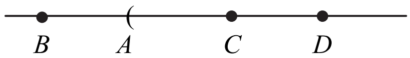
2) C este situat între A şi B:



b) Avem două situaţii:

1) D este situat între A şi C:

2) C este situat între A şi D:

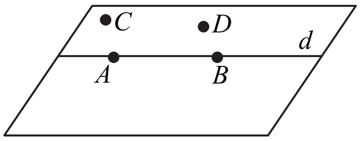


3. Fie punctele diferite A, B, C, D şi o dreaptă d. Ilustraţi grafic următoarele situaţii geometrice:
a) dreapta $AB = d$, $D \in (dC$;
b) dreapta $AB = d$, $D \notin [dC$;
c) dreapta $CD = d$, $B \in (dA$ şi $[AB \cap d \neq \varnothing$;

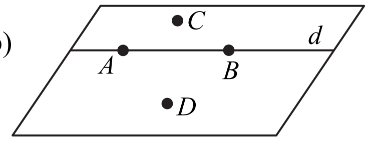
d) dreapta $CD = d$, $B \notin [dA$ şi punctele A, B, C coliniare.

Soluţie:

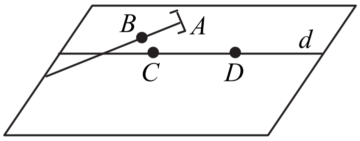
a)



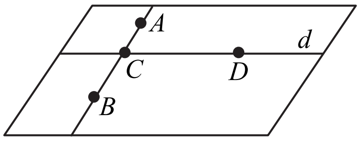
b)



c)



d)



Probleme propuse

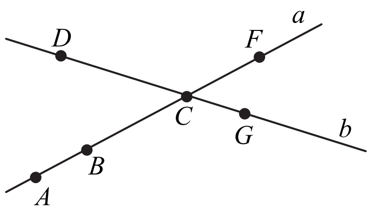
*

1. Folosind desenul de mai jos, precizaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $[MN$ este o semidreaptă deschisă; b) $M \in [MN$;
c) $(MN$ este o semidreaptă deschisă; d) $M \in (MN$;
e) $[QP$ şi $[QN$ sunt semidrepte închise, identice; f) $M \in [QP$;
g) $(PN$ şi $(PQ$ sunt semidrepte deschise, opuse; h) $M \in (PQ$.

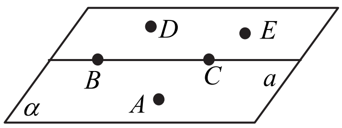
2. Folosind notaţiile din figura alăturată, stabiliţi care dintre următoarele propoziţii sunt adevărate şi care sunt false:

a) $A \in (AB$; b) $D \notin (AB$; c) $A \in [AB$;
d) $F \notin [AB$; e) $[BC \neq [CF$; f) $(AB = (AF$;
g) $[AB \not\subset a$; h) $[DG \subset b$.



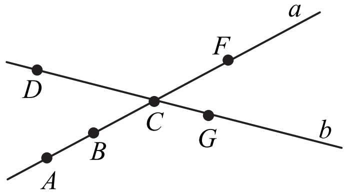
3. Folosind notaţiile din figura alăturată, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $[aD$ este semiplanul închis determinat de dreapta a şi punctul D;
b) $E \in [aD$; c) $A \in (aD$; d) $a \not\subset [aA$;
e) $(aD$ şi $(aA$ sunt semiplane deschise, opuse;
f) $(aD$ şi $(aE$ sunt semiplane închise, identice.



4. Folosind notaţiile din figura de mai jos, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Punctele A şi B sunt de aceeaşi parte a dreptei b;
b) Punctele D şi G sunt de o parte şi de alta a dreptei a;
c) $B \in [bA$; d) $B \notin (bA$; e) $F \in (bA$;
f) $A \in [bB$; g) $B \in (bF$; h) $F \in (aD$.



5. Completați cu notația potrivită:

a) $(AB \cup \{A\} = \ldots$; b) $[AB \setminus \{A\} = \ldots$; c) $(AB \cup \{B\} = \ldots$;
d) $(dA \cup d = \ldots$; e) $[dA \setminus d = \ldots$; f) $(dA \cup \{A\} = \ldots$.

6. Desenați două puncte distincte A şi B. Construiți cu o culoare semidreapta $[BA$ şi cu altă culoare semidreapta $[AB$.

7. Desenați un plan α, o dreaptă $d \subset \alpha$ şi $A \in \alpha$, $A \notin d$. Haşurați semiplanul închis $[dA$ determinat de dreaptă şi punct.

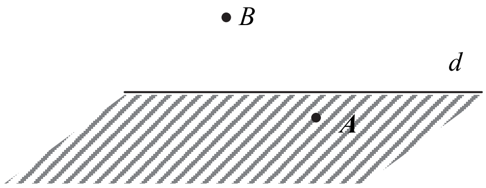
8. Desenați un plan α, o dreaptă $d \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin d$, $B \in d$, $C \in \alpha$, $C \notin (dA$, şi semidreapta $(BC$.

**

9. În figura alăturată s-a haşurat semiplanul determinat de dreapta d şi punctul A. Trasați dreapta AB şi notați cu O intersecția dreptelor d şi AB. Precizați cine este:

a) intersecția dintre semiplanul deschis $(dA$ şi dreapta AB;

b) reuniunea semidreptelor $[OA$ şi $[OB$.

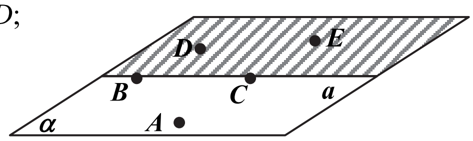


10. Folosind notațiile din figura de mai jos, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $[AB = [AD$; b) $(BC = BD$; c) $(DE = $ (ED;
d) $[AB \subset AB$; e) $[AB \subset [AD$; f) $[DE \not\subset BC$;
g) $(BC \cup \{B\} = [BC$; h) $[CA \cup (CD = d$; i) $[AB \cup (BE = (AC$;
j) $[BA \cap [BE = \{B\}$; k) $[BA \cap [BE = \emptyset$; l) $CD \setminus [CD = (CA$.

11. Folosind notațiile din figura de mai jos, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $[aD = [aE$; b) $(aD = (aA$; c) $BC \subset [aD$;
d) $BC \not\subset [aA$; e) $(aA \cup BC = [aA$;
f) $\{D\} \cup [aD = (aE$; g) $[aA \cap [aE = a$;
h) $(aD \cap [aE = a$; i) $[aD \setminus a = (aE$.



12. Considerăm punctele diferite A, B, C, D, E. Ilustrați grafic:

a) B şi C de aceeaşi parte a punctului A;

b) B şi C de o parte şi de alta a punctului A;

c) $[AB = [AC$; d) $[AB \neq [AC$; e) $(AD = (AE$; f) $[AB \neq [CD$ şi oricare trei dintre punctele A, B, C, D sunt necoliniare;

g) $(AB \neq (CD$ şi trei dintre puncte sunt coliniare.

13. Fie punctele diferite A, B, C, D şi o dreaptă d, ilustrați grafic următoarele situații geometrice:

a) dreapta $AB = d$ şi $C \in [dD$; b) dreapta $AB = d$ şi $C \notin [dD$;
c) dreapta $CD = d$ şi $A \in [dB$; d) dreapta $CD = d$ şi $A \notin [dB$.

14. Fie punctele diferite A, B, C, D, E şi o dreaptă a. Ilustraţi grafic următoarele situaţii geometrice:

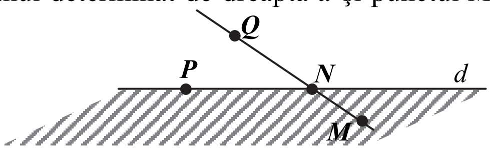
a) dreapta $AB = a$, $D \in [aC$ şi $[BE \subset [aC$;
b) dreapta $AB = a$, $D \notin [aC$ şi $[CE \subset (aC$;
c) dreapta $CD = a$, $B \in [aA$ şi $[DE \not\subset [aA$;
d) dreapta $CD = a$, $B \notin [aA$ şi $[AE \subset [aA$.

***

15. Fie $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2015}$ puncte într-un plan, oricare trei dintre ele fiind necoliniare. Aflaţi numărul cel mai mare de puncte care se pot găsi în acelaşi semiplan determinat de:

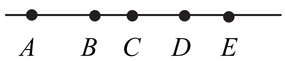
a) o dreaptă ce conţine două dintre punctele date;
b) o dreaptă oarecare.

16. În figura de mai jos s-a haşurat semiplanul determinat de dreapta d şi punctul M. Determinaţi:



a) $(MN \cup [NQ$;
b) $MN \setminus [NQ$;
c) $[MQ \cup (NQ$;
d) $MQ \cap d$;
e) $MQ - [dM$; f) $(dM \cap MQ$; g) $MQ - (dM$.

17. În figura de mai jos se consideră punctele coliniare A, B, C, D, E. Completaţi tabelul alăturat în felul următor: veţi scrie „*da*” în rubrica corespunzătoare dacă punctul aparţine semidreptei şi „*nu*” în caz contrar.



$\in$	$[AB$	$(BC$	$[CD$	$(BA$	$[ED$
A					
B					
C					
D					
E					

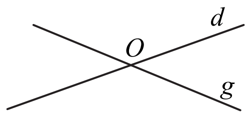
3.3. Pozițiile relative a două drepte

Drepte coplanare

Două drepte sunt **coplanare** dacă există un plan care să le conțină.

Definiție. Două drepte care au un singur punct comun se numesc drepte **concurente** (secante).

Exemplu:

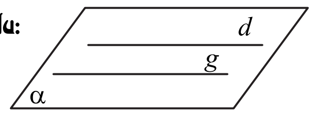


Notăm: $d \cap g = \{O\}$; Citim: dreptele d şi g sunt concurente în punctul $\{O\}$.

Observație: Dacă trei sau mai multe drepte au un punct comun, ele se vor numi **drepte concurente**.

Definiție: Două drepte coplanare, care nu au nici un punct comun se numesc **drepte paralele**.

Exemplu:

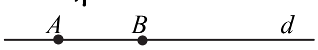


Notăm: $d \parallel g$ sau $d \cap g = \varnothing$;
Citim: dreptele d şi g sunt paralele.

Observație: Dacă două drepte d şi g nu sunt paralele notăm $d \nparallel g$.

Definiție: Două drepte care au toate punctele comune se numesc drepte **identice** (confundate sau suprapuse).

Exemplu:

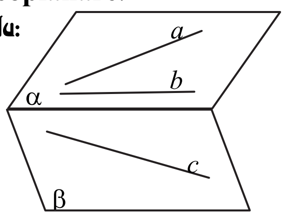


Notăm: $d = AB$; Citim: dreptele d şi AB sunt identice.

Drepte necoplanare

Definiție: Două drepte pentru care nu există un plan care să le conțină se numesc drepte **necoplanare**.

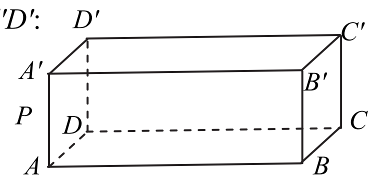
Exemplu:



În figura alăturată, avem:
- dreptele a şi b sunt coplanare ($a, b \subset \alpha$);
- dreptele a şi c sunt necoplanare ($a \subset \alpha$, $c \subset \beta$)
- dreptele b şi c sunt necoplanare.

Observație: Dacă $d \cap g = \varnothing$ atunci $d \parallel g$ sau d şi g sunt drepte necoplanare.

Exemplu: În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$:
- AA' şi $D'C'$ sunt drepte necoplanare;
- AB şi BC sunt drepte concurente în B;
- BC şi $B'C'$ sunt drepte paralele;
- AP şi AA' sunt drepte identice.

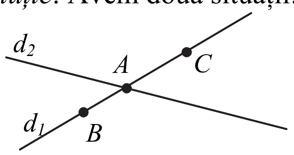


Probleme rezolvate

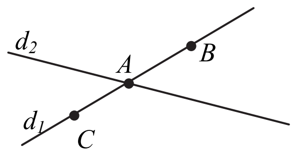
1. Desenați două drepte d_1 şi d_2 concurente în punctul A astfel încât punctele B şi C sunt distincte, diferite de punctul A şi sunt situate în semiplane diferite determinate de dreapta d_2.

Soluție: Avem două situații:

a)



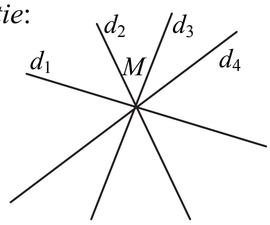
b)



2. a) Desenați patru drepte diferite şi concurente în punctul M.
b) Mai există şi alte drepte concurente în punctul M?

Soluție:

a)

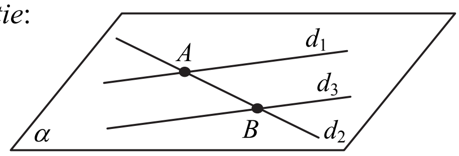


b) Există o infinitate de drepte concurente în punctul M.

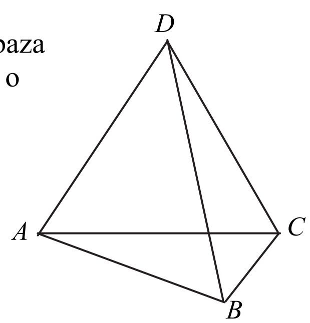
3. Desenați un plan α, dreptele d_1, d_2, d_3 astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

1) $d_1 \subset \alpha$, $d_2 \subset \alpha$, $d_3 \subset \alpha$;
2) $d_1 \cap d_2 = \{A\}$;
3) $d_3 \parallel d_1$;
4) $d_2 \cap d_3 = \{B\}$.

Soluție:



4. În figura alăturată, $ABCD$ reprezintă o piramidă cu baza triunghiul ABC. Fiecare muchie a piramidei determină o dreaptă şi fiecare față a piramidei determină un plan.



a) Scrieți toate dreptele reprezentate în figură şi determinați numărul lor;
b) Câte plane sunt reprezentate în figură?
c) Scrieți toate perechile de drepte concurente şi punctele lor de intersecție;
d) Scrieți toate perechile de drepte necoplanare;
e) Scrieți toate dreptele concurente în A, B, C respectiv D şi scrieți notația corespunzătoare.

CUPRINS

GEOMETRIE

CAPITOLUL 3. DREAPTA

CAPITOLUL 4. UNGHIURI

CAPITOLUL 5. CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR